

УДК 519.718

Д. С. Романов, Е. Ю. Романова

О ЕДИНИЧНЫХ ПРОВЕРЯЮЩИХ ТЕСТАХ ДЛЯ СХЕМ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНОГО ТИПА¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Тестирование дискретных моделей схем переключательного типа – это важная теоретическая задача, имеющая практические приложения к тестированию и верификации сверхбольших интегральных схем. В качестве класса управляющих систем в основном рассматривается класс так называемых обобщенных итеративных контактных схем, содержащий внутри себя классические контактные схемы, но допускающий использование суперпозиций. Целью данной работы является демонстрация возможности построения (для произвольной, отличной от константы булевой функции), допускающей короткий единичный проверяющий тест схемы, реализующей или моделирующей эту функцию (в последнем случае схема реализует функцию после подстановки вместо некоторых входных переменных констант).

Материалы и методы. При получении основных результатов использовались методы синтеза схем, основанных на разложении булевой функции в полином Жегалкина.

Результаты. Устанавливается, что для произвольной, отличной от константы булевой функции f , зависящей от n переменных, существуют тестопригодные реализующие функцию f обобщенные итеративные контактные схемы, допускающие: а) единичный проверяющий тест замыкания (размыкания) длины $O(1)$; б) единичный проверяющий тест длины $O(n)$, а также имеются тестопригодные моделирующие функцию f обобщенная итеративная контактная схема и контактная схема, допускающие единичные проверяющие тесты длин $O(1)$.

Ключевые слова: булева функция, контактная схема, обобщенная итеративная контактная схема, проверяющий тест.

D. S. Romanov, E. Yu. Romanova

ON SINGLE DETECTING TEST SETS FOR CIRCUITS OF SWITCHING TYPE

Abstract.

Background. Testing of discrete models of switching-type circuits is an important theoretical problem with applications to testing and verification of VLSI. The article considers a class of so-called generalized iterative switching circuits (GISC). This class consists of classical switching circuits (SC), however, it allows the usage of superpositions. The aim of this work is to demonstrate that for an arbitrary nonconstant Boolean function it is possible to construct a circuit realizing or

¹ Финансирование работы осуществлялось в рамках проектов РФФИ № 15-01-07474-а и № 13-01-00958-а и Государственного задания № 2014/601 от 06.02.2014.

modeling this function (in the latter case the circuit realizes a function after substitution constants instead of some input variables), and allowing a small single detecting test set.

Materials and methods. The authors used circuit design methods based on the Zhegalkin polynomials.

Results. It has been established that for an arbitrary nonconstant Boolean function f depending on n variables there exist testable GISCs realizing f and admitting a) the single fault detecting test set (under homogeneous faults – closures or breakings) of power $O(1)$, b) the single fault detecting test set of power $O(n)$. Moreover, it has proved that for an arbitrary nonconstant Boolean function f depending on n variables there exist testable GISCs and SCs modeling f and admitting the single fault detecting test set of power $O(1)$.

Key words: boolean function, switching circuit, generalized iterative switching circuit, detecting test set.

Введение

В статье устанавливается, что для произвольной, отличной от константы булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ существуют тестопригодные реализующие функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ обобщенные итеративные контактные схемы, допускающие:

- а) единичный проверяющий тест замыкания (размыкания) длины $O(1)$;
- б) единичный проверяющий тест длины $O(n)$.

Также имеются тестопригодные моделирующие функцию f обобщенная итеративная контактная схема и контактная схема, допускающие единичные проверяющие тесты длин $O(1)$.

Все невведенные в работе определения (в частности, связанные с графами и контактными схемами) можно найти в книгах [1, 2]. Определим по аналогии с [2, с. 143–144] понятие обобщенной итеративной контактной схемы. Пусть $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a; z_1, \dots, z_m)$ – контактная схема (КС) с входным полюсом a и выходными полюсами $z_1, \dots, z_m$, реализующая систему функций $(f_1(\tilde{x}^n), \dots, f_m(\tilde{x}^n))$ (здесь $f_k(\tilde{x}^n)$ – функция проводимости между входным полюсом a и выходным полюсом z_k , $k = \overline{1; m}$). Пусть контакты переменной x_i не встречаются ни на каких простых цепях, соединяющих входной полюс a с выходным полюсом z_j . Тогда применима операция *присоединения управляющей переменной x_i к выходу z_j* . Эта операция заключается в том, что вершина z_j исключается из числа выходных полюсов (и становится *итеративным полюсом*), ей приписывается символ новой *итеративной переменной u* , все контакты x_i заменяются на контакты u , а все контакты $\bar{x}_i$ заменяются на контакты $\bar{u}$ (переменная x_i перестает быть управляющей переменной в полученной схеме). Новая схема по сравнению со старой реализует между входным полюсом a и выходным полюсом z_k функцию, полученную из $f_k(\tilde{x}^n)$ подстановкой функции $f_j(\tilde{x}^n)$ вместо переменной x_j ($k \in \{1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m\}$). Аналогично определяется операция присоединения в КС Σ управляющих переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_t}$ к выходам $z_{j_1}, \dots, z_{j_t}$ соответственно, при этом различ-

ные присоединяемые переменные должны присоединяться к различным выходам, и одна переменная может присоединяться лишь к одному выходу. Контакты каждой переменной x_{i_q} не должны встречаться ни на каких простых цепях, соединяющих входной полюс a с выходным полюсом z_{j_q} . Тогда для каждой пары (x_{i_q}, z_{j_q}) ($k = \overline{1; t}$) последовательно применяется операция присоединения управляющей переменной x_{i_q} к выходу z_{j_q} . При этом вершина z_{j_q} исключается из числа выходных полюсов и становится итеративным полюсом, ей приписывается символ новой *итеративной переменной* u_q , все контакты x_{i_q} заменяются на контакты u_q , а все контакты $\bar{x}_{i_q}$ заменяются на контакты $\bar{u}_q$ (переменная x_{i_q} перестает быть управляющей переменной в полученной схеме). Новая схема по сравнению со старой называется *обобщенной итеративной контактной схемой* (ОИКС) Σ' и реализует между входным полюсом a и выходным полюсом z_k функцию, полученную из $f_k(\tilde{x}^n)$ подстановкой функций $f_{j_1}(\tilde{x}^n), \dots, f_{j_t}(\tilde{x}^n)$ вместо переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_t}$ соответственно ($k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_t\}$). Функционирование полученной схемы Σ' представляет собой систему булевых функций, реализуемых на ее выходах (т.е. систему функций проводимости между входным полюсом и каждым из выходных полюсов). Всякий объект, который невозможно построить указанным выше способом как обобщенную итеративную контактную схему, не может считаться обобщенной итеративной контактной схемой. В дальнейшем о каждом итеративном полюсе подсхемы, используемом вне подсхемы, мы будем говорить как о *выходном итеративном полюсе подсхемы*. Отметим, что отличие ОИКС от итеративных контактных схем (ИКС) состоит в том, что в ИКС все контакты присоединяемых к выходам управляющих переменных должны быть замыкающими (т.е. они не могут содержать отрицаний). В работе [3] получены асимптотические оценки высокой степени точности для функции Шеннона сложности реализации систем функций с помощью ИКС.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – произвольная булева функция, отличная от константы и зависящая от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($f \in P_2(n)$), S – двухполюсная КС или двухполюсная ОИКС (с одним входным и одним выходным полюсом; количество внутренних итеративных полюсов в ОИКС может быть произвольным), реализующая функцию f (т.е. функция проводимости между входным и выходным полюсами в схеме S равна функции f). Пусть на схему S действует источник неисправностей U , способный вызывать размыкания и замыкания контактов в схеме. Схема S называется *тестпригодной (относительно обнаружения неисправностей для источника неисправностей U)* тогда и только тогда, когда при любой неисправности схемы S , вызванной действием на нее источника U , полученная вследствие этой неисправности схема S' реализует функцию $f'(\tilde{x}^n)$, не равную f . Обозначим через W множество всех попарно неравных функций, каждая из которых может быть реализована в результате действия на схему S источника неисправностей U (в частности, $f \in W$).

Пусть в схеме S произошла неисправность и в неисправном состоянии схема стала реализовывать функцию $f'(\tilde{x}^n)$. Будем говорить, что данная неисправность в схеме S обнаруживается на наборе $\tilde{\alpha}^n$, если $f'(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\alpha})$. Множество T наборов значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется *проверяющим (диагностическим) тестом* для схемы S относительно источника неисправностей U тогда и только тогда, когда для любой функции $f' \in W$ такой, что $f' \neq f$, найдется набор $\tilde{\alpha}$ из T , для которого выполнено неравенство $f'(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\alpha})$ (соответственно для любых двух функций f', f'' из W таких, что $f' \neq f''$, найдется набор $\tilde{\alpha}$ из T , для которого выполнено неравенство $f'(\tilde{\alpha}) \neq f''(\tilde{\alpha})$). Количество различных наборов в тесте T называется его *длиной* и обозначается через $l(T)$ или через $|T|$. Тест минимальной длины называется *минимальным*. Тест называется *полным*, если источник неисправностей может повреждать произвольное количество контактов в схеме, и *единичным*, если в схеме может быть поврежден не более чем один контакт. Будем говорить, что двухполюсная схема (КС или ОИКС), реализующая функцию $g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+d+r})$, *моделирует функцию* $f(x_1, \dots, x_n)$, если существует такой набор булевых констант $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, что $g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+d}, \alpha_1, \dots, \alpha_r) = f(x_1, \dots, x_n)$. Минимально возможная величина r при этом называется *входной избыточностью моделирования функции* f схемой S .

Отметим, впрочем, что когда о последовательно-параллельной контактной схеме говорится, что она *моделирует формулу* в базисе $x \& y, x \vee y, \bar{x}$, в которой отрицания висят лишь над символами переменных, то это означает, что индуктивная склейка схемы осуществляется в соответствии с данной формулой; схема при этом реализует функцию, реализуемую формулой, см. [2]

Обозначим через $D_U(S)$ длину минимального проверяющего теста относительно источника неисправностей U в схеме S , через $D_U(f(\tilde{x}^n))$ (через $\hat{D}_U(f(\tilde{x}^n))$) – минимум величины $D_U(S)$ по всем тестопригодным относительно обнаружения неисправностей для источника неисправностей U реализующим (соответственно моделирующим) функцию $f(\tilde{x}^n)$ схемам S . Пусть $\hat{P}_2^n$ – множество всех булевых функций, существенно зависящих от всех своих переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ (в частности, $\hat{P}_2^0 = \{0, 1\}$). Всюду в дальнейшем будем, не ограничивая общности, считать, что любая не равная тождественно константе функция $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит от всех своих переменных. Через $D_U(n)$ (через $\hat{D}_U(n)$) обозначим *функцию Шеннона* (соответственно, *слабую функцию Шеннона*) длины проверяющего теста относительно источника неисправностей U , т.е. функцию

$$D_U(n) = \max_{f(\tilde{x}^n) \in \hat{P}_2(n)} D_U(f(\tilde{x}^n)),$$

соответственно функцию

$$\hat{D}_U(n) = \max_{f(\tilde{x}^n) \in \hat{P}_2^n(n)} \hat{D}_U(f(\tilde{x}^n)).$$

Аналогично вводится функция Шеннона длины диагностического теста относительно источника неисправностей U . Верхний индекс (КС или ОИКС) в обозначении слабой или обычной функции Шеннона длины теста будет указывать на класс схем.

Первые оценки функций Шеннона длин тестов для контактных схем (которые являются частным случаем ОИКС) появились уже в работе С. В. Яблонского и И. А. Чегис [4]. Фактически, было доказано, что без требования тестопригодности схем функция Шеннона длины единичного диагностического (а, значит, и проверяющего) теста для двухполюсных контактных схем есть $O\left(\frac{2^n}{n}\right)$. Х. А. Мадатяном в работе [5], в частности, установлено,

что точное значение функции Шеннона длины полного диагностического теста для контактных схем равно 2^n , а в работе [6] доказано, что рост функции Шеннона длины единичного проверяющего теста для контактных схем ограничен величиной $O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$. Н. П. Редькиным доказано, что полный проверяющий

тест для контактных схем не обязан содержать все наборы и что соответствующая функция Шеннона не превосходит $\frac{15}{16} \cdot 2^n$ [7]. Им же было установлено [8], что функция Шеннона длины полного проверяющего теста замыкания в контактных схемах есть $O(2^{n/2})$, а также была получена нетривиальная верхняя оценка $O(2^{2n \log_2 n / (1+2 \log_2 n)})$ функции Шеннона длины полного проверяющего теста замыкания в контактных схемах. А. И. Рыбко в работе [9] предложил асимптотически оптимальный метод синтеза (2, 2)-КС таких, что для произвольной булевой функции f от n переменных и при $b = o\left(\sqrt{\frac{n}{\log_2 n}}\right)$ в КС между одной парой полюсов функция f моделируется (с входной избыточностью, не большей $2\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + 2$) подсхемой, корректирующей b замыканий, а вторая пара полюсов используется для тестирования так, что схема в целом допускает проверяющий тест замыкания, имеющий длину не более $2\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + 2$.

В работе [10] устанавливается, что для произвольной отличной от константы булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ существует (допускающая единичный проверяющий тест линейной по n длины) тестопригодная схема:

а) трехполюсная контактная схема (с одним входным и двумя выходными полюсами), реализующая систему функций $(f, \bar{f})$;

б) двухполюсная контактная схема, реализующая функцию $f(x_1, \dots, x_n) \oplus x_{n+1}$.

В настоящей работе предлагаются новые верхние оценки обычной и слабой функций Шеннона длины единичного проверяющего теста для ОИКС, демонстрирующие легкотестируемость ОИКС в рамках задачи обнаружения одиночных неисправностей (замыканий или размыканий контактов).

Основными результатами данной статьи являются теоремы 1–4, доказываемые ниже, а также их следствия.

Опишем сначала некоторые двухполюсные КС, которые будут использоваться далее в качестве подсхем двухполюсных ОИКС.

Обозначим через $\Sigma_m(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ($m \geq 2$) минимальную построенную по методу каскадов двухполюсную контактную схему счетчика четности $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_m$ (см., например, рис. 3.6 в [2, с. 207]). Блоком в этой схеме считается нерасширяемая связная подсхема из контактов, управляемых одной переменной; число блоков указывается нижним индексом в названии схемы, названия блоков суть $B_1, B_2, \dots, B_m$. Блоки не объединяются и не меняют названий при отождествлениях или переименованиях переменных (и даже контактов) в схеме $\Sigma_m(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Размыкающие контакты в этой схеме будут считаться изображаемыми горизонтально, а замыкающие – наклонно. Порядок переменных в названии схемы (здесь и далее) определяет, какая переменная участвует в управлении очередного блока в схеме (в дальнейшем будут рассматриваться и схемы, у которых в управлении одним блоком участвуют две переменные, но одна из них будет общей для всех таких блоков, – она будет в названии схемы указываться в конце списка переменных после точки с запятой). Опишем более подробно, как устроен блок B_i для переменной x_i в схеме $\Sigma_m(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ($i = \overline{1; m}$). У блока B_i при $i = \overline{2; m-1}$ два входных (левый верхний и левый нижний) и два выходных (правый верхний и правый нижний) полюса. Два замыкающих (наклонных) контакта x_i соединяют левый верхний полюс блока B_i с правым нижним (первый контакт), а левый нижний – с правым верхним (второй контакт). Два размыкающих контакта $\bar{x}_i$ соединяют левый верхний полюс блока с правым верхним (первый контакт – верхний горизонтальный), а левый нижний полюс – с правым нижним (второй контакт – нижний горизонтальный). Блок B_1 таков: его левый (и единственный входной) полюс a' соединяется контактом $\bar{x}_1$ с правым нижним (одним из выходных) полюсом блока B_1 , а контактом x_1 – с правым верхним (вторым из выходных) полюсом блока B_1 . Блок B_m таков: его правый нижний (один из входных) полюс соединяется контактом x_m с левым (и единственным выходным) полюсом b' , а его правый верхний (один из входных) полюс соединяется контактом $\bar{x}_m$ с полюсом b' . Блоки соединяются так: правый верхний (соответственно правый нижний) полюс блока B_i отождествляется с левым верхним (соответственно левым нижним) полюсом блока B_{i+1} ($i = \overline{1, m-1}$). Вершина a' объявляется входным полюсом построенной схемы $\Sigma_m(x_1, x_2, \dots, x_m)$, а вершина b' – ее выходным полюсом. На рис. 1 изображена схема $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ с полюсами a, b' .

Схема $\Sigma'_{m+2}(z_1, x_1, x_2, \dots, x_m, z_3; z_2)$ ($m \geq 1$) получается из схемы $\Sigma_{m+2}(z_1, x_1, x_2, \dots, x_m, z_3)$ следующим образом: все верхние горизонтальные контакты блоков $B_2, \dots, B_{m+1}$ переименовываются в контакты $\bar{z}_2$, все нижние горизонтальные контакты этих блоков инвертируются (и оказываются контактами $x_1, \dots, x_m$), все наклонные контакты этих блоков переименовываются в контакты z_2 , оба контакта блока B_{m+2} инвертируются (и верхний становится контактом z_3 , а нижний – контактом $\bar{z}_3$). Легко видеть, что при $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ схема $\Sigma'_{m+2}(z_1, x_1, x_2, \dots, x_m, z_3; z_2)$ моделирует функцию, задаваемую монотонной конъюнкцией $x_1 \& x_2 \& \dots \& x_m$. На рис. 2 изображена схема $\Sigma'_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_5; y_4)$ с полюсами a_i, b_i .

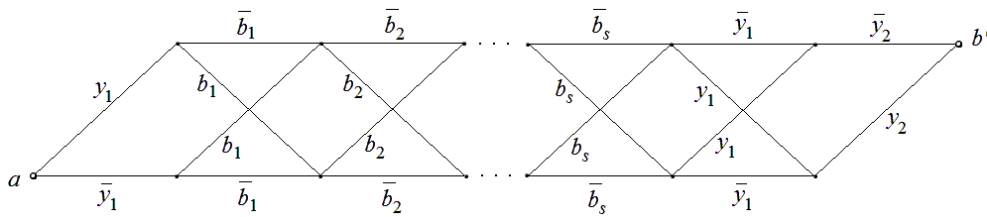
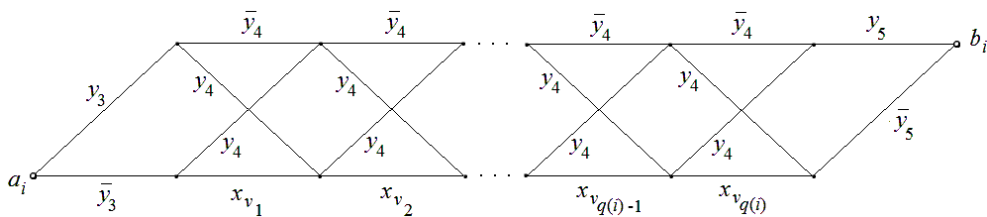
Рис. 1. Схема $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ Рис. 2. Схема $\Sigma'_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_5; y_4)$

Схема $\Sigma''_{m+2}(z_1, x_1, x_2, \dots, x_m, z_3; z_2)$ ($m \geq 1$) получается из схемы $\Sigma_{m+2}(z_1, x_1, x_2, \dots, x_m, z_3)$ следующим образом: все горизонтальные контакты блоков $B_2, \dots, B_{m+1}$ переименовываются в контакты $\bar{z}_2$, все наклонные контакты этих блоков, соединяющие левый нижний полюс блока с правым верхним, инвертируются (и оказываются контактами $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$), остальные наклонные контакты этих блоков переименовываются в контакты z_2 . Легко видеть, что при $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ схема $\Sigma''_{m+2}(z_1, x_1, x_2, \dots, x_m, z_3; z_2)$ моделирует функцию, задаваемую отрицанием монотонной конъюнкцией: $\overline{x_1 \& x_2 \& \dots \& x_m} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_m$. На рис. 3 изображена схема $\Sigma''_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_5; y_4)$ с полюсами a_i, b_i .

Лемма 1. Пусть $1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_q \leq n$. При нечетном q рассмотрим в качестве схем Σ', Σ'' двухполюсные КС $\Sigma'_{q+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_q}, y_5; y_4)$

и $\Sigma''_{q+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_q}, y_5; y_4)$ соответственно, при четном q рассмотрим в качестве схем Σ' , Σ'' двухполюсные КС $\Sigma'_{q+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_q}, y_6; y_4)$ и $\Sigma''_{q+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_q}, y_6; y_4)$ соответственно. Тогда найдутся 8 таких наборов значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, y_3, y_4, y_5, y_6$ (переменные в наборах следуют в этом порядке, а значения всех переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ на каждом из наборов совпадают), что:

1) эти наборы образуют единичный проверяющий тест для каждой из схем Σ' , Σ'' ;

2) на каждом из этих наборов проводимости схем Σ' , Σ'' различны, и при этом на четырех из этих наборов проводит схема Σ' и на других четырех из этих наборов проводит схема Σ'' .

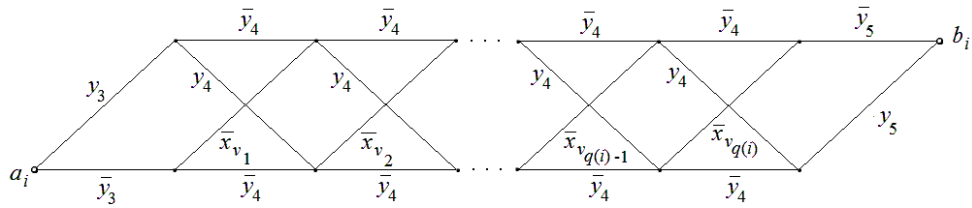


Рис. 3. Схема $\Sigma''_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_5; y_4)$

Доказательство. Ввиду простоты рассматриваемых подсхем ограничимся перечислением самих восьми наборов и описанием обнаруживаемых ими одиночных неисправностей в схемах. В каждой из схем Σ' , Σ'' :

а) под цепью Z_1 будем понимать простую проводящую цепь, начинающуюся с контакта $\bar{y}_1$, содержащую все нижние горизонтальные контакты блоков $B_2, \dots, B_{m+1}$ и нижний контакт блока B_{m+2} ;

б) под цепью Z_2 будем понимать простую проводящую цепь, начинающуюся с контакта y_1 , содержащую все верхние горизонтальные контакты блоков $B_2, \dots, B_{m+1}$ и верхний контакт блока B_{m+2} ;

в) под цепью Z_3 будем понимать простую проводящую цепь, начинающуюся с контакта $\bar{y}_1$, состоящую в блоках $B_2, \dots, B_{m+1}$ только из наклонных контактов, а в блоке B_{m+2} содержащую тот контакт, который соединяет лежащий на этой цепи выходной полюс блока B_{m+1} с выходным полюсом схемы;

г) под цепью Z_4 будем понимать простую проводящую цепь, начинающуюся с контакта y_1 , состоящую в блоках $B_2, \dots, B_{m+1}$ только из наклонных контактов, а в блоке B_{m+2} содержащую тот контакт, который соединяет лежащий на этой цепи выходной полюс блока B_{m+1} с выходным полюсом схемы.

В табл. 1 в первом столбце приводятся сами эти наборы, во втором – значения функции проводимости схемы Σ' на этих наборах, в третьем перечисляются виды обнаруживаемых на этих наборах неисправностей схемы Σ' .

Таблица 1

$x_1 \dots x_n y_3 y_4 y_5 y_6$	h'	Обнаруживаемые неисправности
1 ... 1 0 0 0 0	1	размыкания всех контактов цепи Z_1
1 ... 1 1 0 1 1	1	размыкания всех контактов цепи Z_2
0 ... 0 0 1 1 0	1	размыкания всех контактов цепи Z_3
0 ... 0 1 1 0 1	1	размыкания всех контактов цепи Z_4
1 ... 1 1 0 0 0	0	замыкания контактов $\bar{y}_3, y_5, y_6$ и всех наклонных контактов в $B_2, \dots, B_{m+1}$
1 ... 1 0 0 1 1	0	замыкания контактов $y_3, \bar{y}_5, \bar{y}_6$ и всех наклонных контактов в $B_2, \dots, B_{m+1}$
0 ... 0 1 1 1 0	0	замыкания контактов $\bar{y}_3, \bar{y}_5, y_6$ и всех горизонтальных контактов в $B_2, \dots, B_{m+1}$
0 ... 0 0 1 0 1	0	замыкания контактов $y_3, y_5, \bar{y}_6$ и всех горизонтальных контактов в $B_2, \dots, B_{m+1}$

Таблица 2 построена аналогично табл. 1, но описывает обнаружение неисправностей схемы Σ'' .

Таблица 2

$x_1 \dots x_n y_3 y_4 y_5 y_6$	h''	Обнаруживаемые неисправности
1 ... 1 0 0 0 0	0	замыкания контактов y_3, y_5, y_6 и всех наклонных контактов в $B_2, \dots, B_{m+1}$
1 ... 1 1 0 1 1	0	замыкания контактов $\bar{y}_3, \bar{y}_5, \bar{y}_6$ и всех наклонных контактов в $B_2, \dots, B_{m+1}$
0 ... 0 0 1 1 0	0	замыкания контактов $y_3, \bar{y}_5, y_6$ и всех горизонтальных контактов в $B_2, \dots, B_{m+1}$
0 ... 0 1 1 0 1	0	замыкания контактов $\bar{y}_3, y_5, \bar{y}_6$ и всех горизонтальных контактов в $B_2, \dots, B_{m+1}$
1 ... 1 1 0 0 0	1	размыкания всех контактов цепи Z_2
1 ... 1 0 0 1 1	1	размыкания всех контактов цепи Z_1
0 ... 0 1 1 1 0	1	размыкания всех контактов цепи Z_4
0 ... 0 0 1 0 1	1	размыкания всех контактов цепи Z_3

Первое утверждение леммы следует теперь из того, что в каждой таблице упомянуты как обнаруживаемые все возможные одиночные неисправности схем Σ' , Σ'' , а второе – из построчного сравнения таблиц. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – произвольная булева функция, отличная от константы. Тогда функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать тестопригодной двух-полюсной ОИКС, допускающей:

а) единичный проверяющий тест размыкания, имеющий длину, не превосходящую 7;

б) единичный проверяющий тест замыкания, имеющий длину, не превосходящую 4.

Доказательство. Докажем утверждение пункта а. Построим для отличной от константы булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ реализующую ее ОИКС Σ_f с одним входным и одним выходным полюсами следующим образом. Пусть в полиноме Жегалкина для функции f имеется s отличных от констант слагаемых $K_1, K_2, \dots, K_s$, являющихся монотонными конъюнкциями, а сам полином Жегалкина можно привести к виду $K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_s \oplus \beta_0$, где $\beta_0 \in \{0, 1\}$.

Для каждого слагаемого K_i ($i = \overline{1, s}$) полинома Жегалкина функции f строится своя подсхема $S(K_i)$ с входным полюсом a_i и выходным итеративным полюсом b_i . Пусть $K_i = x_{v_1} x_{v_2} \dots x_{v_{q(i)}}$, где $1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_{q(i)} \leq n$. Тогда КС $S(K_i)$ моделирует формулу $x_{v_1} x_{v_2} \dots x_{v_{q(i)}}$ и представляет собой цепочку замыкающих контактов.

Схема $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ с входным полюсом a_{s+1} и выходным итеративным полюсом b_{s+1} также является подсхемой ОИКС Σ_f .

Наконец, при $\beta_0 = 0$ (при $\beta_0 = 1$) к схеме Σ_f добавляется подсхема S с входным полюсом a_{s+2} и выходным полюсом b , моделирующая формулу $b_{s+1} \bar{y}_2 \vee \bar{b}_{s+1} y_2$ (соответственно моделирующая формулу $b_{s+1} y_2 \vee \bar{b}_{s+1} \bar{y}_2$).

Отметим, что у построенных подсхем $S(K_1), \dots, S(K_s), \Sigma_{s+3}(y_1, c_1, c_2, \dots, c_s, y_1, y_2)$, S пока нет попарно общих вершин. Для построения схемы Σ_f остается отождествить все входные полюсы $a_1, \dots, a_s, a_{s+1}, a_{s+2}$ во входной полюс a схемы Σ_f , а выходным полюсом этой схемы объявить полюс b . Легко видеть, что ОИКС Σ_f при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию, равную f (переменные y_1, y_2 являются фиктивными).

Основная идея дальнейшего доказательства сводится к тому, что все одиночные размыкания контактов в подсхемах $S(K_1), S(K_2), \dots, S(K_s)$ схемы Σ_f обнаруживаются на одном наборе, а для обнаружения размыканий в двух оставшихся подсхемах достаточно добавить наборы, количество которых не превосходит константы.

Будем считать все двоичные наборы длины $n+2$ (в рамках дальнейшего доказательства теоремы) наборами значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2$, идущих в этом порядке.

Случай 1. Пусть s – четное число. Положим $\tilde{\alpha}_1 = (\tilde{1}^n, 0, 1)$, $\tilde{\alpha}_2 = (\tilde{1}^n, 1, 1)$, $\tilde{\alpha}_3 = (\tilde{0}^n, 0, 1)$, $\tilde{\alpha}_4 = (\tilde{0}^n, 1, 1)$. Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – такой набор

значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, что $f(\tilde{\alpha}) = \beta_0 \oplus 1$ (такой набор существует, так как функция f отлична от константы). Определим $\tilde{\alpha}_5 = (\tilde{\alpha}, 1, 0)$, $\tilde{\alpha}_6 = (\tilde{\alpha}, 0, 0)$.

Оказывается, на наборе $\tilde{\alpha}_1$ обнаруживаются все одиночные размыкания контактов в подсхемах $S(K_1), S(K_2), \dots, S(K_s)$ схемы Σ_f . Действительно, допустим, произошло размыкание какого-то контакта в подсхеме $S(K_i)$. На наборе $\tilde{\alpha}_1$ при отсутствии неисправностей на всех итеративных полюсах всех этих подсхем были единицы, при возникновении же указанного размыкания появится нуль на выходном итеративном полюсе неисправной подсхемы $S(K_i)$. В результате на наборе $\tilde{\alpha}_1$ на выходном итеративном полюсе подсхемы $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ и на выходе схемы Σ_f окажутся неверные значения, так что неисправность будет обнаружена.

Каждому из наборов $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_6$ соответствует простая проводящая цепь в подсхеме $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$, соединяющая входной и итеративный выходной полюсы этой подсхемы, причем этими шестью цепями покрываются все контакты подсхемы $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$, так что на указанных шести наборах обнаруживаются все одиночные размыкания контактов в $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$. Заметим, что наборы $\tilde{\alpha}_5, \tilde{\alpha}_6$ нужны для обнаружения размыканий контактов, смежных с верхней левой вершиной блока B_{s+3} .

Для обнаружения размыканий в подсхеме S достаточно двух наборов. При $\beta_0 = 0$ это наборы $\tilde{\alpha}_5$ и $\tilde{\alpha}_7 = (\tilde{\alpha}, 1, 1)$, а при $\beta_0 = 1$ это наборы $\tilde{\alpha}_2$ и $\tilde{\alpha}_8 = (\tilde{0}^n, 0, 0)$. Видно, что семи наборов всегда достаточно.

Случай 2. Пусть s – нечетное число. Положим $\tilde{\alpha}_1 = (\tilde{1}^n, 0, 0)$, $\tilde{\alpha}_2 = (\tilde{1}^n, 1, 0)$, $\tilde{\alpha}_3 = (\tilde{0}^n, 0, 1)$, $\tilde{\alpha}_4 = (\tilde{0}^n, 1, 1)$.

На наборе $\tilde{\alpha}_1$ обнаруживаются все одиночные размыкания контактов в подсхемах $S(K_1), S(K_2), \dots, S(K_s)$ схемы Σ_f (как и в случае 1). Каждому из наборов $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_4$ соответствует простая проводящая цепь в подсхеме $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$, соединяющая входной и итеративный выходной полюсы этой подсхемы, причем этими четырьмя цепями покрываются все контакты подсхемы $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$, так что на указанных четырех наборах обнаруживаются все одиночные размыкания контактов в $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$. Для обнаружения размыканий в подсхеме S достаточно двух наборов. При $\beta_0 = 0$ это наборы $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_5 = (\tilde{1}^n, 1, 1)$, а при $\beta_0 = 1$ это наборы $\tilde{\alpha}_3$ и $\tilde{\alpha}_6 = (\tilde{0}^n, 0, 0)$. Видно, что пяти наборов достаточно. Утверждение пункта а доказано.

Доказательство утверждения пункта б аналогично доказательству утверждения пункта а. Вместо полинома Жегалкина функцию f нужно представить в виде суммы (по модулю два) различных монотонных дизъюнкций положительных рангов и константы β_0 (такое представление, очевидно,

получается применением принципа двойственности к полиному Жегалкина двойственной к f функции и последующими элементарными преобразованиями). Пусть $f = D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_s \oplus \beta_0$, где $D_1, D_2, \dots, D_s$, – упомянутые монотонные дизъюнкции. Отличие устройства схемы Σ_f в пункте б от схемы Σ_f в пункте а лишь в том, что каждая из подсхем $S(D_1), \dots, S(D_s)$, в отличие от подсхем $S(K_1), \dots, S(K_s)$ из пункта а, представляет собой пучок параллельных замыкающих контактов, а не цепочку последовательных.

Случай 1. Пусть s – четное число. Положим $\tilde{\alpha}_1 = (\tilde{1}^n, 0, 0)$, $\tilde{\alpha}_2 = (\tilde{0}^n, 0, 0)$. Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – такой набор значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, что $f(\tilde{\alpha}) = \beta_0 \oplus 1$ (такой набор существует, так как функция f отлична от константы). Определим $\tilde{\alpha}_3 = (\tilde{\alpha}, 1, 1)$. На наборе $\tilde{\alpha}_2$ обнаруживаются все одиночные замыкания контактов в подсхемах $S(D_1), S(D_2), \dots, S(D_s)$ схемы Σ_f . На наборах $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3$ обнаруживаются все одиночные замыкания контактов в $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$. Заметим, что набор $\tilde{\alpha}_3$ нужен для обнаружения замыкания размыкающего контакта блока B_{s+3} . Для обнаружения замыканий в подсхеме S достаточно двух наборов. При $\beta_0 = 0$ это наборы $\tilde{\alpha}_2$ и $\tilde{\alpha}_4 = (\tilde{0}^n, 0, 1)$, а при $\beta_0 = 1$ это наборы $\tilde{\alpha}_3$ и $\tilde{\alpha}_4 = (\tilde{\alpha}, 1, 0)$. Видно, что четырех наборов всегда достаточно.

Случай 2. Пусть s – нечетное число. Положим $\tilde{\alpha}_1 = (\tilde{1}^n, 1, 1)$, $\tilde{\alpha}_2 = (\tilde{0}^n, 0, 0)$, $\tilde{\alpha}_3 = (\tilde{0}^n, 1, 1)$, $\tilde{\alpha}_4 = (\tilde{0}^n, 0, 1)$. На наборе $\tilde{\alpha}_2$ обнаруживаются все одиночные замыкания контактов в подсхемах $S(D_1), S(D_2), \dots, S(D_s)$ схемы Σ_f . На наборах $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ обнаруживаются все одиночные замыкания контактов в $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$. Для обнаружения замыканий в подсхеме S достаточно двух наборов. При $\beta_0 = 0$ это наборы $\tilde{\alpha}_2$ и $\tilde{\alpha}_3$, а при $\beta_0 = 1$ это наборы $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_4$. Видно, что трех наборов достаточно. Теорема 1 доказана.

Следствие. Пусть $U^{cl,1}$ – источник одиночных замыканий контактов, а $U^{br,1}$ – источник одиночных размыканий контактов. Тогда при любом натуральном n справедливы оценки:

$$D_{U^{cl,1}}^{ОИКС}(n) \leq 4, \quad D_{U^{br,1}}^{ОИКС}(n) \leq 7.$$

Из доказательства теоремы 1 вытекает важная для дальнейших построений лемма.

Лемма 2. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – произвольная булева функция, отличная от константы, а ее полином Жегалкина можно привести к виду $K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_s \oplus \beta_0$, где $\beta_0 \in \{0, 1\}$, а $K_1, K_2, \dots, K_s$ – различные монотонные конъюнкции. Пусть функцию f моделирует некоторая двухполюсная ОИКС $\hat{\Sigma}_f$ с входным полюсом a и выходным полюсом b , между полюсом a

и каждым итеративным полюсом b_i ($i = \overline{1; s}$) построена схема, моделирующая функцию, представимую конъюнкцией K_i при нулевых значениях дополнительных переменных, а двухполюсная схема $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ с входным полюсом a и выходным полюсом b является подсхемой схемы $\hat{\Sigma}_f$. Тогда для обнаружения одиночных неисправностей (размыканий и замыканий) в схеме $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ достаточно девяти наборов.

Доказательство сразу вытекает из того, что, рассуждения об обнаружении замыкания контакта в подсхеме $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ в доказательстве пункта б теоремы 1 дословно переносятся на подсхему $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ схемы $\hat{\Sigma}_f$, так что для обнаружения замыкания достаточно трех наборов, а для обнаружения размыкания контакта в подсхеме $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ схемы $\hat{\Sigma}_f$ (как и в подсхеме $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ схемы Σ_f) достаточно шести наборов. Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – такой набор значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, что $f(\tilde{\alpha}) = \beta_0 \oplus 1$ (такой набор существует, так как функция f отлична от константы). Приведем получающиеся тесты, перечисляя входящие в них наборы в более естественном порядке (порядок переменных в наборе таков: $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2$).

Случай 1. Пусть s – четное число. Тогда единичный проверяющий тест для подсхемы $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ имеет вид $T_s^* = \{(\tilde{0}^n, 0, 0), (\tilde{0}^n, 0, 1), (\tilde{0}^n, 1, 1), (\tilde{1}^n, 0, 0), (\tilde{1}^n, 0, 1), (\tilde{1}^n, 1, 1), (\tilde{\alpha}, 0, 0), (\tilde{\alpha}, 1, 0), (\tilde{\alpha}, 1, 1)\}$.

Случай 2. Пусть s – нечетное число. Тогда единичный проверяющий тест для подсхемы $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ имеет вид $T_s^* = \{(\tilde{0}^n, 0, 0), (\tilde{0}^n, 0, 1), (\tilde{0}^n, 1, 1), (\tilde{1}^n, 0, 0), (\tilde{1}^n, 1, 0), (\tilde{1}^n, 1, 1)\}$. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – произвольная булева функция, отличная от константы. Тогда функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать тестопригодной ОИКС, допускающей единичный проверяющий тест длины, не превосходящей $4n + 8$.

Доказательство. В статье [10] в доказательстве пункта 2 теоремы 1 была построена двухполюсная КС $\Sigma_{\hat{f}}$, реализующая функцию $\hat{f} = f \oplus x_{n+1}$ и допускающая единичный проверяющий тест длины не более $4n + 8$, причем среди наборов теста имелись наборы, на которых:

а) функция $\hat{f}$ обращается в 0 и переменная x_{n+1} равна 0 (назовем такой набор $\tilde{\gamma}_1$);

б) функция $\hat{f}$ обращается в 0 и переменная x_{n+1} равна 1 (назовем такой набор $\tilde{\gamma}_2$);

в) функция $\hat{f}$ обращается в 1 и переменная x_{n+1} равна 0 (назовем такой набор $\tilde{\gamma}_3$);

г) функция $\hat{f}$ обращается в 1 и переменная x_{n+1} равна 1 (назовем такой набор $\tilde{\gamma}_4$).

Будем считать схему $\Sigma_{\hat{f}}$ подсхемой ОИКС Σ_f , полагая, что входной полюс $\Sigma_{\hat{f}}$ – это входной полюс a схемы Σ_f , а выходной полюс $\Sigma_{\hat{f}}$ – это итеративный полюс b_1 . Добавим еще контактную подсхему S с входным полюсом a и выходным полюсом b , моделирующую формулу $b_1 \bar{x}_{n+1} \vee \bar{b}_1 x_{n+1}$ и не имеющую с $\Sigma_{\hat{f}}$ иных общих вершин, кроме входного полюса. Полученная ОИКС Σ_f реализует между полюсами a и b функцию f и допускает единичный проверяющий тест длины не более $4n+8$, так как все одиночные неисправности подсхемы $\Sigma_{\hat{f}}$ обнаруживаются на наборах теста, описанного в доказательстве пункта 2 теоремы 1 в [10], а все одиночные неисправности подсхемы S обнаруживаются на наборах $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3, \tilde{\gamma}_4$. Теорема 2 доказана.

Следствие. Пусть U^1 – источник одиночных неисправностей контактов (замыканий или размыканий). Тогда при любом натуральном n справедлива оценка

$$D_{U^1}^{\text{ОИКС}}(n) \leq 4n + 8.$$

Теорема 3. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – произвольная булева функция. Тогда функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно смоделировать тестопригодной двухполюсной ОИКС $\hat{\Sigma}_f$, допускающей единичный проверяющий тест, имеющий длину, не превосходящую 11, и при этом входная избыточность моделирования функции f этой схемой не превосходит 5.

Доказательство. Если функция f – константа, то искомая ОИКС $\hat{\Sigma}_f$ имеет вид контакта переменной y_1 . Построим для отличной от константы булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ моделирующую ее ОИКС $\hat{\Sigma}_f$ с одним входным и одним выходным полюсом следующим образом. Пусть в полиноме Жегалкина для функции f имеется s отличных от констант слагаемых $K_1, K_2, \dots, K_s$, являющихся монотонными конъюнкциями, а сам полином Жегалкина можно привести к виду $K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_s \oplus \beta_0$, где $\beta_0 \in \{0, 1\}$. Для каждого слагаемого $K_i = x_{v_1} x_{v_2} \dots x_{v_{q(i)}}$ ($i = \overline{1, s}, 1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_{q(i)} \leq n$) полинома Жегалкина функции f строится в соответствии с леммой 1 своя подсхема $\hat{S}(K_i)$, имеющая при нечетном $q(i)$ вид $\Sigma'_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_5; y_4)$ и при четном $q(i)$ вид $\Sigma'_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_6; y_4)$, с входным полюсом a_i и выходным итеративным полюсом b_i . Входные полюсы этих подсхем отождествляются во входной полюс a схемы и к схеме добавляется еще в соответствии с условием леммы 2 двухполюсная подсхема

$\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$. Искомая ОИКС $\hat{\Sigma}_f$ получена. Единичный проверяющий тест для нее строится на основании лемм 1, 2 с учетом того, что один и тот же набор значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ (идущих в этом порядке) может использоваться и как набор значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, y_3, y_4, y_5, y_6$ из леммы 1, и как набор значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2$ из леммы 2. Приведем итоговые единичные проверяющие тесты. Пусть s – четное число. Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – такой набор значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, что $f(\tilde{\alpha}) = \beta_0 \oplus 1$ (такой набор существует, так как функция f отлична от константы). Тогда единичный проверяющий тест для схемы $\hat{\Sigma}_f$ имеет вид

$$T_s = \{(\tilde{0}^n, 0, 0, 0, 1, 1, 0), (\tilde{0}^n, 0, 1, 1, 1, 0, 1), (\tilde{0}^n, 1, 1, 1, 1, 1, 0), (\tilde{0}^n, 0, 0, 0, 1, 0, 1),$$

$$(\tilde{1}^n, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (\tilde{1}^n, 0, 1, 1, 0, 1, 1), (\tilde{1}^n, 1, 1, 1, 0, 0, 0), (\tilde{1}^n, 0, 0, 0, 0, 1, 1),$$

$$(\tilde{\alpha}, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (\tilde{\alpha}, 1, 0, 0, 0, 0, 0), (\tilde{\alpha}, 1, 1, 0, 0, 0, 0)\} \text{ (достаточно 11 наборов).}$$

Пусть теперь s – нечетное число. Тогда единичный проверяющий тест для схемы $\hat{\Sigma}_f$ имеет вид

$$T_s = \{(\tilde{0}^n, 0, 0, 0, 1, 1, 0), (\tilde{0}^n, 0, 1, 1, 1, 0, 1), (\tilde{0}^n, 1, 1, 1, 1, 1, 0),$$

$$(\tilde{0}^n, 0, 0, 0, 1, 0, 1), (\tilde{1}^n, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (\tilde{1}^n, 1, 0, 1, 0, 1, 1),$$

$$(\tilde{1}^n, 1, 1, 1, 0, 0, 0), (\tilde{1}^n, 0, 0, 0, 0, 1, 1)\} \text{ (достаточно 8 наборов).}$$

Теорема доказана.

Замечание. Входную избыточность моделирования функции f можно уменьшить до 4 (не увеличивая длину теста), если добавить к схеме $\hat{\Sigma}_f$ подсхему S из доказательства теоремы 1, перенеся выход всей схемы в выходной полюс подсхемы S .

Следствие. Пусть U^1 – источник одиночных неисправностей контактов (замыканий или размыканий). Тогда при любом целом неотрицательном n справедлива оценка: $\hat{D}_{U^1}^{\text{ОИКС}}(n) \leq 11$.

Теорема 4. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – произвольная булева функция. Тогда функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно смоделировать тестопригодной двухполюсной КС $\hat{\Sigma}_f^*$, допускающей единичный проверяющий тест, имеющий длину, не превосходящую 35, и при этом входная избыточность моделирования функции f этой схемой не превосходит 5.

Доказательство. Если функция f – константа, то искомая КС $\hat{\Sigma}_f^*$ имеет вид контакта переменной y_1 . Построим для отличной от константы

булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ моделирующую ее КС $\hat{\Sigma}_f^*$ с одним входным и одним выходным полюсом следующим образом. Пусть в полиноме Жегалкина для функции f имеется s отличных от констант слагаемых $K_1, K_2, \dots, K_s$, являющихся монотонными конъюнкциями, а сам полином Жегалкина можно привести к виду $K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_s \oplus \beta_0$, где $\beta_0 \in \{0, 1\}$. Для каждого слагаемого $K_i = x_{v_1} x_{v_2} \dots x_{v_{q(i)}}$ ($i = \overline{1, s}$, $1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_{q(i)} \leq n$) полинома Жегалкина функции f строятся в соответствии с леммой 1:

а) схема $\hat{S}'(K_i)$, имеющая при нечетном $q(i)$ вид

$$\Sigma'_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_5; y_4)$$

и при четном $q(i)$ вид

$$\Sigma'_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_6; y_4),$$

б) схема $\hat{S}''(K_i)$, имеющая при нечетном $q(i)$ вид

$$\Sigma''_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_5; y_4)$$

и при четном $q(i)$ вид

$$\Sigma''_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_6; y_4).$$

В построенной в соответствии с условием леммы 2 двухполюсной схеме $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ с входным полюсом a и выходным полюсом b каждый контакт b_i заменяется на двухполюсную подсхему $\hat{S}'(K_i)$, а каждый контакт $\bar{b}_i$ заменяется на двухполюсную подсхему $\hat{S}''(K_i)$ ($i = \overline{1, s}$). При такой замене блок B_i схемы $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ превращается в гиперблок B_i новой схемы. Искомая КС $\hat{\Sigma}_f^*$ получена. Она моделирует функцию f (достаточно положить $y_2 = \beta_0$, $y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$). Единичный проверяющий тест для нее строится на основании лемм 1, 2. Возьмем восемь наборов из доказательства леммы 1 и заменим каждый из них на 4 набора, добавив произвольные значения переменных y_1, y_2 (обозначим составленное множество из 32 наборов через $\tilde{T}$). Пользуясь тем, что по лемме 2 на каждом из полученных 32 наборов у всех подсхем $\hat{S}'(K_i)$ проводимости одинаковые и отличны от проводимостей всех подсхем $\hat{S}''(K_i)$, проводимость между входными и выходными полюсами в гиперблоках (и сохранившихся блоках B_1, B_{s+2}, B_{s+3}) схемы $\hat{\Sigma}_f^*$, будет такой же, как при тех же значениях y_1, y_2 на наборах, где все значения переменных $x_1, \dots, x_n$ одинаковы. В блоках B_1, B_{s+2}, B_{s+3} на указанных наборах обнаруживаются все одинаковые неисправности контактов, кроме размыканий трех контактов, инци-

дентных верхнему входному полюсу блока B_{s+3} и замыкания нижнего контакта B_{s+3} при четном s . Добавим к $\tilde{T}$ наборы $(\tilde{\alpha}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(\tilde{\alpha}, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(\tilde{\alpha}, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$, чтобы ликвидировать этот недостаток. Полученное множество T из 35 наборов образует единичный проверяющий тест для схемы $\hat{\Sigma}_f^*$. Действительно, рассмотрим сначала ситуацию, когда разомкнут вследствие неисправности некоторый контакт (назовем его z) в одной из подсхем S'' (вида $\hat{S}'(K_i)$ или $\hat{S}''(K_i)$). В T в силу леммы 2 существуют наборы, на которых подсхема S'' проводит и в ней имеется простая проводящая между ее полюсами цепь, проходящая через контакт z . Среди этих наборов есть такой, на котором вся схема $\hat{\Sigma}_f^*$ при отсутствии неисправностей проводит и при этом имеется простая проводящая цепь между полюсами схемы, проходящая через полюсы подсхемы S'' . На этом наборе обнаруживается размыкание контакта z . Пусть теперь этот же контакт z в подсхеме S'' замкнут вследствие неисправности. В T в силу леммы 2 существуют наборы, на которых подсхема S'' не проводит между своими полюсами, но при замыкании контакта z в ней возникает проводящая между ее полюсами цепь. Среди этих наборов есть такой, на котором вся схема $\hat{\Sigma}_f^*$ не проводит. Это, однако, предполагает, что в гиперблоках $B_2, \dots, B_{s+1}$ в силу свойств схемы $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ и подсхем $\hat{S}'(K_i)$, $\hat{S}''(K_i)$ от двух входных полюсов гиперблока B_2 к двум выходным полюсам гиперблока B_{s+1} ведут две не имеющие общих контактов проводящие цепи так, что при возникновении проводимости между полюсами S'' во всей схеме $\hat{\Sigma}_f^*$ возникает проводимость. На этом-то наборе и обнаруживается замыкание контакта z . Теорема доказана.

Следствие. Пусть U^1 – источник одиночных неисправностей контактов (замыканий или размыканий). Тогда при любом целом неотрицательном n справедлива оценка: $\hat{D}_{U^1}^{KC}(n) \leq 35$.

Авторы выражают благодарность профессору С. А. Ложкину за обсуждение работы и ценные замечания.

Список литературы

1. **Редькин, Н. П.** Надежность и диагностика схем / Н. П. Редькин. – М. : Изд-во МГУ, 1992. – 192 с.
2. **Ложкин, С. А.** Лекции по основам кибернетики / С. А. Ложкин. – М. : МАКС Пресс, 2004. – 256 с.
3. **Ложкин, С. А.** Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности реализации систем функций итеративными контактными схемами / С. А. Ложкин, А. В. Кондратов // Прикладная математика и информатика. – Вып. 21. – М. : МАКС Пресс, 2005. – С. 102–110.
4. **Чегис, И. А.** Логические способы контроля работы электрических схем / И. А. Чегис, С. В. Яблонский // Труды МИАН СССР. – 1958. – Т. LI. – С. 270–360.

5. **Мадатян, Х. А.** Полный тест для неповторных контактных схем / Х. А. Мадатян // Проблемы кибернетики. – Вып. 23. – М. : Наука, 1970. – С. 103–118.
6. **Мадатян, Х. А.** Построение единичных тестов для контактных схем / Х. А. Мадатян // Сборник работ по математической кибернетике. – М. : ВЦ АН СССР, 1981. – С. 77–86.
7. **Редькин, Н. П.** О полных проверяющих тестах для контактных схем / Н. П. Редькин // Методы дискретного анализа в исследовании экстремальных структур. – Вып. 39. – Новосибирск : Изд-во ИМ СО АН СССР, 1983. – С. 80–87.
8. **Редькин, Н. П.** О проверяющих тестах замыкания и размыкания / Н. П. Редькин // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. – Вып. 40. – Новосибирск : Изд-во ИМ СО АН СССР, 1983. – С. 87–99.
9. **Рыбко, А. И.** О контактных схемах, корректирующих замыкания и допускающих контроль / А. И. Рыбко // Математические вопросы кибернетики. – Вып. 1. – М. : Наука, 1988. – С. 168–190.
10. **Романов, Д. С.** О синтезе контактных схем, допускающих короткие проверяющие тесты / Д. С. Романов // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. – 2014. – Т. 156, кн. 3. – С. 110–115.

References

1. Red'kin N. P. *Nadezhnost' i diagnostika skhem* [Reliability and diagnostics of circuits]. Moscow: Izd-vo MGU, 1992, 192 p.
2. Lozhkin S. A. *Leksii po osnovam kibernetiki* [Lectures on basic cybernetics]. Moscow: MAKSS Press, 2004, 256 p.
3. Lozhkin S. A., Kondratov A. V. *Prikladnaya matematika i informatika* [Applied mathematics and informatics]. Issue 21. Moscow: MAKSS Press, 2005, pp. 102–110.
4. Chegis I. A., Yablonskiy S. V. *Trudy MIAN SSSR* [Proceedings of Steklov Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences]. 1958, vol. LI, pp. 270–360.
5. Madatyan Kh. A. *Problemy kibernetiki* [Problems of cybernetics]. Issue 23. Moscow: Nauka, 1970, pp. 103–118.
6. Madatyan Kh. A. *Sbornik rabot po matematicheskoy kibernetike* [Collected works on mathematical cybernetics]. Moscow: VTs AN SSSR, 1981, pp. 77–86.
7. Red'kin N. P. *Metody diskretnogo analiza v issledovanii ekstremal'nykh struktur* [Methods of discrete analysis in research of extreme structures]. Issue 39. Novosibirsk: Izd-vo IM SO AN SSSR, 1983, pp. 80–87.
8. Red'kin N. P. *Metody diskretnogo analiza v optimizatsii upravlyayushchikh system* [Methods of discrete analysis in optimization of control systems]. Issue 40. Novosibirsk: Izd-vo IM SO AN SSSR, 1983, pp. 87–99.
9. Rybko A. I. *Matematicheskie voprosy kibernetiki* [Mathematical problems of cybernetics]. Issue 1. Moscow: Nauka, 1988, pp. 168–190.
10. Romanov D. S. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki* [Proceedings of Kazan University. Series: physical and mathematical sciences]. 2014, vol. 156, bk. 3, pp. 110–115.

Романов Дмитрий Сергеевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математической
кибернетики, Московский
государственный университет
имени М. В. Ломоносова (Россия,
г. Москва, Ленинские горы, 1)

E-mail: romanov@cs.msu.ru

Romanov Dmitriy Sergeevich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematical
cybernetics, Moscow State University
named after M. V. Lomonosov
(1 Leninskie gory street, Moscow, Russia)

Романова Елена Юрьевна

кандидат педагогических наук, доцент,
кафедра прикладной математики,
Российский государственный
социальный университет (Россия,
г. Москва, ул. Вильгельма Пика, 4, стр. 1)

E-mail: klenar2001@mail.ru

Romanova Elena Yur'evna

Candidate of pedagogical sciences,
associate professor, sub-department
of applied mathematics, Russian State
Social University (building 1, 4 Wilgelma
Pika street, Moscow, Russia)

УДК 519.718

Романов, Д. С.

О единичных проверяющих тестах для схем переключательного типа / Д. С. Романов, Е. Ю. Романова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 1 (33). – С. 5–23.